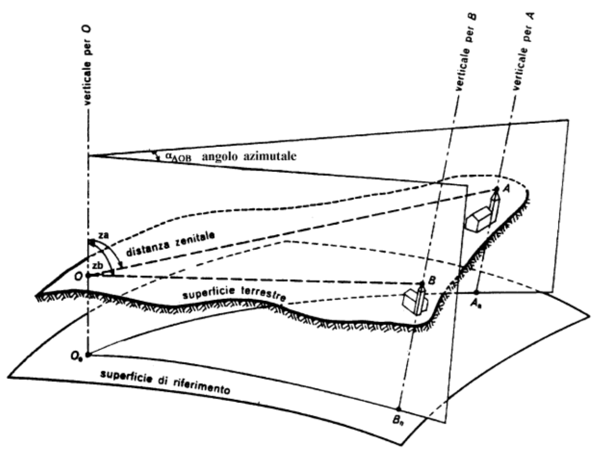
5 STRUMENTI TOPOGRAFICI

5.1 IL TEODOLITE (Misuratore di angoli)

Dati tre punti O, A e B della superficie terrestre, si definisce:

- <u>angolo azimutale</u> fra A e B misurato in O, la *sezione retta dell'angolo diedro* formato dal piano contenente la verticale per O ed il punto A ed il piano contenente la verticale per O ed il punto B.

  Questo angolo coincide, a meno di correzioni in genere trascurabili (superiori ai minimi errori di misura), con l'angolo fra le due sezioni normali sulla superficie di riferimento (ellissoide).



- <u>angolo zenitale</u> l'angolo che la direzione OA forma con la verticale in O; il suo complemento è l'angolo di altezza.

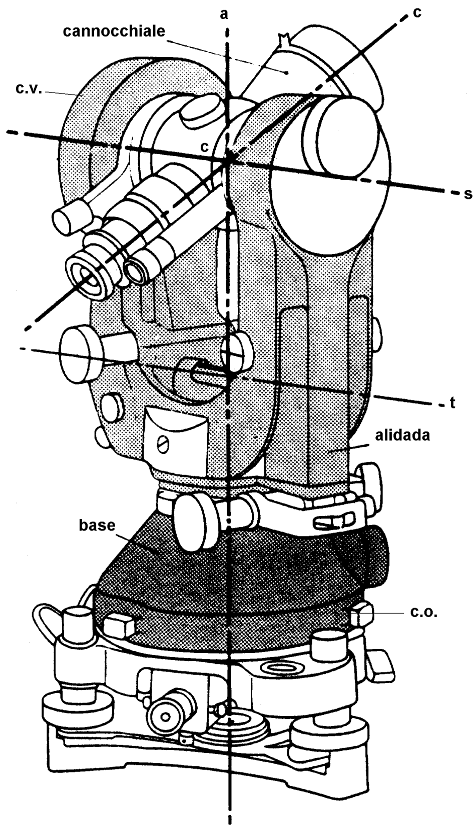
Il *teodolite* è lo strumento che misura gli angoli azimutali e zenitali (con determinati accessori può anche misurare distanze ed azimut magnetici o geografici).

Il teodolite è costituito da una base ***b***, solidale al terreno attraverso un treppiede, munita di tre "viti calanti" che permettono l'orientamento dell'<u>asse primario</u> ***a***, quello intorno a cui ruota l'alidada.

Sull'alidada è montato il cannocchiale che ruota intorno all'<u>asse secondario</u> ***s***, all'interno di esso è definito un terzo asse ***c***, detto di <u>collimazione</u> .

Se lo strumento è rettificato l'asse secondario "**s**" è normale all'asse primario ***a*** e l'asse di collimazione "**c**" è normale all'asse *s*.

Quando lo strumento è messo in stazione "È" è posto lungo la verticale e, di conseguenza, ***s*** diviene orizzontale. In queste condizioni l'asse di collimazione ***c*** ruotando attorno ad ***s*** descrive un piano verticale. I tre assi si incontrano in generale in un punto C, detto centro dello strumento.



Le letture degli angoli vengono effettuate mediante letture su cerchi graduati; quello per le misure azimutali è per costruzione normale all'asse "**a**" e risulta, quindi, orizzontale quando lo strumento è in stazione (C.O.); il cerchio per la misura delle distanze zenitali è, invece, normale ad "**s**" e risulta, perciò, in un piano verticale, se anche l'asse "**a**" è tale (C.V.), gli indici di lettura sono in entrambi i casi fissati all'alidada.

Le graduazioni dei due cerchi sono sempre numerate in senso orario e possono essere sessagesimali o centesimali.

Dirigendo l'asse di collimazione prima verso A e poi verso B ed eseguendo sul cerchio le misure L_A ed L_B, la differenza L_B-L_A è uguale all'angolo azimutale AOB, misurata in senso orario da A verso B ($\alpha_{AOB} = L_B - L_A$).

Sul C.V. si leggono, invece, le rotazioni dell'asse "**c**" intorno ad "**s**". Supponiamo, allora, di conoscere la lettura "Z" in corrispondenza della direzione verticale dell'asse "**c**"; se ruotiamo l'asse "**c**" nel piano verticale contenente un punto A la rotazione è uguale alla "<u>distanza zenitale</u>" ed è data dalla differenza tra la lettura S e la lettura Z, ossia:

z = S-Z

<u>Un angolo si esprime, in ogni caso, come differenza di due letture.</u>

La misura degli angoli azimutali e zenitali ha un valore di incertezza che dipende dallo strumento utilizzato, dall'ambiente in cui si opera, dai segnali che si collimano e da altri fattori che verranno esaminati in seguito.

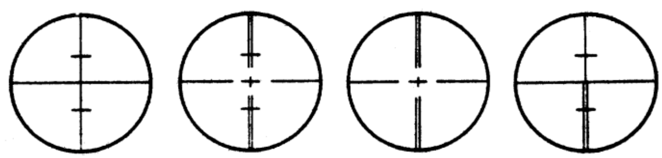
La precisione strumentale di un teodolite varia entro limiti molto ampi, poiché lo scarto quadratico medio strumentale varia da circa 0.1" a circa 1'.

L'accuratezza ottenibile nella misura degli angoli zenitali risulta inferiore soprattutto a causa dell'influenza negativa della rifrazione atmosferica.

Tutte le parti che costituiscono il teodolite devono essere progettate e realizzate adeguatamente rispetto alla precisione globale dello strumento.

Il *cannocchiale* di un teodolite è in generale di tipo astronomico, ed è costituito da due lenti convergenti, la prima, *obbiettivo*, ha una distanza focale molto più grande della seconda, chiamata *oculare*. L'immagine data dall'obbiettivo viene fatta cadere tra il fuoco ed il 1° punto principale dell'oculare: ne risulta un'immagine virtuale, diritta ed ingrandita che può essere osservata ponendo l'occhio dietro l'oculare.

Il cannocchiale è dotato di un *reticolo* costituito da un vetrino con sottili linee incise che, con diverse modalità, permettono di individuare un punto centrale chiamato "centro" del reticolo.



Il reticolo è posto nello stesso piano in cui si forma l'immagine reale, il suo centro è sempre vicino all'asse ottico dell'obbiettivo ed un punto si dice collimato quando la sua immagine cade sul centro del reticolo.

I moderni strumenti topografici non utilizzano il cannocchiale astronomico, bensì il cannocchiale a lunghezza costante che presenta numerosi vantaggi:

a) è fissa la distanza fra obbiettivo e reticolo (una lente divergente, mobile entro il cannocchiale, provvede a far sì che le immagini reali degli oggetti collimati a varie distanze si formino sempre sul piano del reticolo);

b) ha maggiori ingrandimenti, a parità di lunghezza del cannocchiale;

c) il suo asse di collimazione, durante la messa a fuoco, è univocamente determinato (al contrario di quello del cannocchiale astronomico);

d) è praticamente stagno alla polvere e all'umidità, ecc..

Per la collimazione di un punto è necessario rispettare le seguenti regole:

1. Adattamento alla visione distinta del reticolo. Si ottiene rivolgendo l'obiettivo verso una superficie chiara (cielo) e spostando l'oculare, fino a vedere nitidamente il reticolo.
2. Collimazione approssimata con il mirino esterno (cannocchiale cercatore).
3. Bloccaggio delle viti di fermo dell'alidada e del cannocchiale.
4. Adattamento alla distanza (spostando la vite di messa a fuoco) e controllo della coincidenza dei piani su cui giacciono le immagini del reticolo e dell'oggetto collimato (assenza di parallasse).

5. Collimazione esatta con le viti micrometriche.

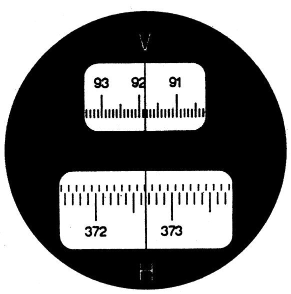
Se le operazioni sono state eseguite correttamente, spostando l'occhio davanti all'oculare non devono avvenire spostamenti relativi apprezzabili tra i tratti del reticolo e l'immagine dell'oggetto collimato.

I *cerchi graduati* dei teodoliti hanno, oggi, dimensioni assai ridotte per poter realizzare strumenti di piccolo ingombro. Lo spessore dei tratti del cerchio, riportanti una finissima graduazione, deve essere molto piccolo e, quindi, l'osservazione dei cerchi non può che essere effettuata attraverso un microscopio, il quale serve anche come organo di lettura (indice).

La lettura ai cerchi consiste nell'individuazione sempre dei gradi e le parti di grado incise sul cerchio e valutando le frazioni di intervallo con mezzi diversi; distinguiamo anzitutto i mezzi in due gruppi: il gruppo in cui la valutazione delle frazioni è effettuata con una stima e quello in cui si ricorre ad un sistema micrometrico.

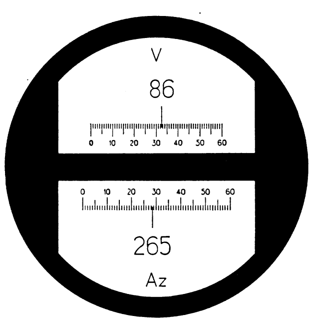
Esempi del primo gruppo sono:

a) microscopio a stima sul reticolo è eseguita la semplice stima diretta sulla graduazione dei cerchi;



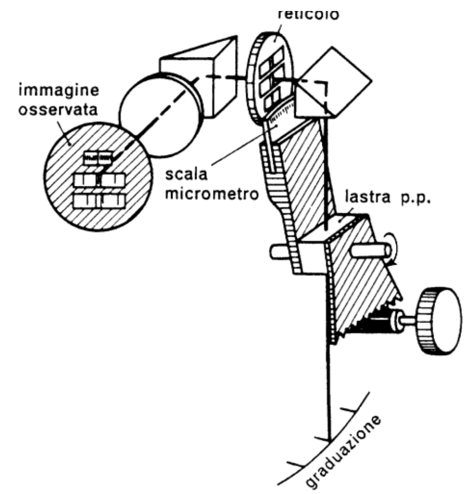
Lettura centesimale V = 91.85^g H = 372.66^g

b) microscopio a scala sul reticolo del microscopio di lettura è incisa una scala, divisa in un certo numero di parti, la cui lunghezza è uguale alla lunghezza di un intervallo della graduazione del cerchio; si leggono così direttamente le parti della scala comprese tra l'origine ed il tratto di graduazione precedente e si può stimare una porzione della parte della scala.

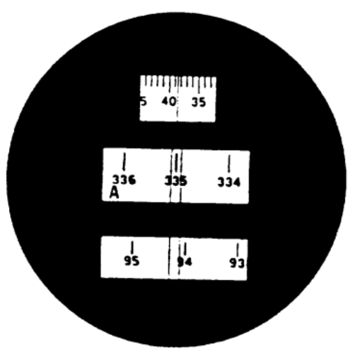


Lettura sessagesimale V = 86°32',5 H = 265°28',5

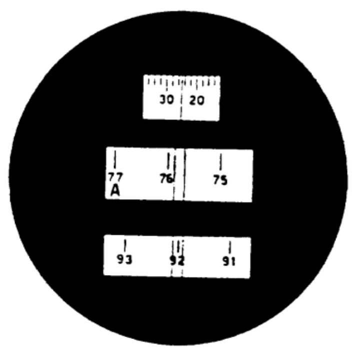
c) Lettura con micrometro può essere eseguita attraverso la lastra piano-parallela posta nel microscopio micrometrico in posizione opportuna lungo il percorso dei raggi di lettura del cerchio, girevole intorno ad un asse ortogonale alla direzione dei raggi in modo da eseguire la lettura dell’angolo di cui la lastra piano-parallela è ruotata.



Si ruota la lastra fin tanto che un tratto della graduazione viene ad essere centrato dal reticolo; l’angolo di cui la lastra ha ruotato rispetto alla posizione iniziale è proporzionale alla frazione di intervallo che si vuole valutare. Le letture possono essere fatte o sul bottone di comando delle rotazioni della lastra, oppure su un piccolo cerchio graduato che viene fatto ruotare insieme alla lastra, la cui immagine appare nell’oculare (solitamente entrambe le letture permettono di leggere direttamente le frazioni di intervallo). Con questo sistema possono essere effettuate letture con la precisione fino a 0.1" .



lettura 335° 38′ 30″



lettura 92^g 2450

Una diversa concezione si ha con la lettura a contatore digitale il sistema di lettura è formato da una sorgente luminosa e da una sottostante cellula fotoelettrica; al ruotare del sistema di lettura si produce nel circuito della cellula una variazione di corrente in corrispondenza di ogni passaggio luce-buio; tali variazioni di corrente definiscono pertanto un certo numero di impulsi che vengono sommati e registrati in un contatore digitale di impulsi.

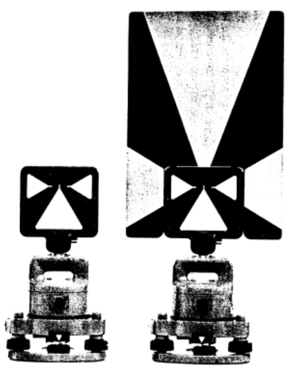
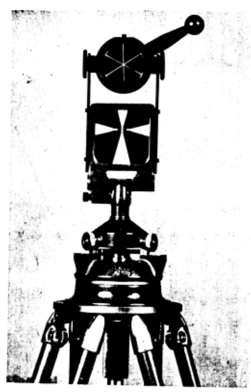
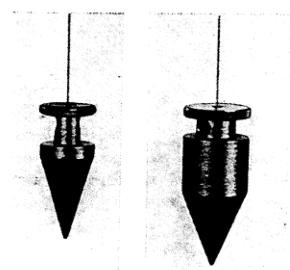
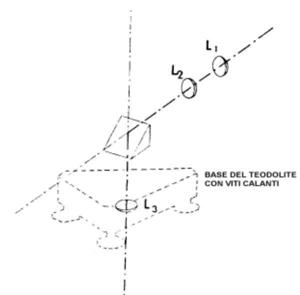
La lettura automatica digitale è legata al valore della precisione (il numero dei tratti alla periferia del cerchio non può essere aumentato a piacere), che raramente può scendere sotto il secondo centesimale.

5.1.1 Messa in stazione di un teodolite

La messa in stazione di uno strumento in un punto P materializzabile (con un picchetto o con un segno che lo identifichi) consiste nell'importante operazione preliminare di rendere verticale e passante per P l'asse principale *a* dell'alidada.

<u>Sistemi di centramento</u>: il punto di stazione, come pure i segnali da collimare, devono essere definiti con una precisione adeguata al tipo di misura da eseguire è possibile suddividerli in:

- sistemi di centramento "forzato", che realizzano la intercambiabilità tra strumento e segnale, si ottengono precisioni di centramento inferiori al mm;
- "piombino ottico" si raggiungono precisioni di centramento di qualche mm , di cui sovente è dotato lo strumento;
- con il "filo a piombo" sospeso alla vite di attacco dello strumento ed in assenza di vento raggiunge una precisione di circa 1cm.

Si badi che la precisione di centramento è importante sia per le misure di controllo delle deformazioni sia per misure di elevata precisione.

5.1.2 Livelle

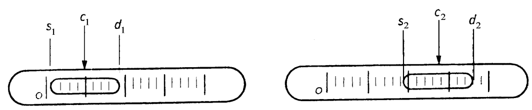
Le livelle in uso sono essenzialmente di due tipi:

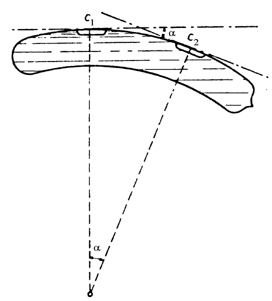
- <u>livella sferica</u> consistente in una fiala di vetro avente la superficie interna a forma di calotta sferica; il piano tangente alla sfera nel centro della bolla è orizzontale ed è, a *bolla* centrata, parallelo al piano di appoggio a condizione che la livella sia rettificata.

La sua sensibilità è piuttosto bassa e può raggiungere un'approssimazione di 2'÷3'.

E' usata negli strumenti topografici e negli accessori (basette, stadie, ecc.) per permettere orientamenti rapidi.

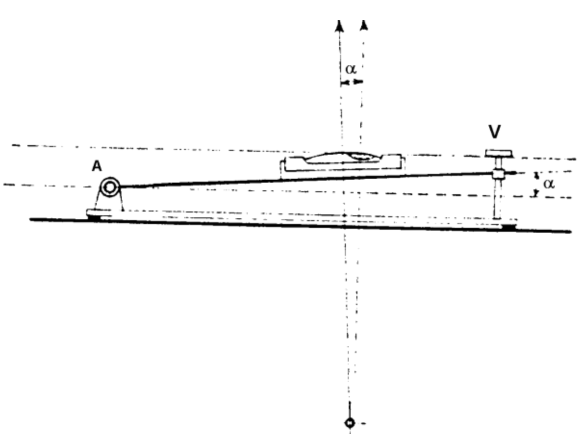
- <u>livella torica</u> è una fiala di vetro riempita parzialmente di un liquido poco viscoso (alcool, etere o benzina) avente la superficie interna di forma toroidale nella parte più alta del *toroide* si forma una *bolla.* La superficie del liquido che delimita la bolla, a parte i menischi, è orizzontale; ne deriva che la tangente centrale alla curva direttrice del "toroide" nel punto di mezzo della bolla è sempre orizzontale.





Sulla fiala è incisa una graduazione i cui tratti distano di uno o due millimetri. *Centrare la bolla* significa ruotare la livella finché la mezzeria della bolla si porta sulla mezzeria della graduazione, in tal modo il punto di mezzo della bolla non è individuabile con precisione, mentre lo sono i menischi laterali, che dovranno, ovviamente, essere simmetrici rispetto al centro della graduazione. La bolla si dice *centrata* se i suoi estremi sono equidistanti dai tratti simmetrici della graduazione.

La *sensibilità della livella* è definita come l'angolo di cui deve ruotare la tangente centrale perché la bolla si sposti di 1mm; è evidente che quanto più alto è il valore del raggio R della sezione mediana del toroide, tanto più elevata è la sensibilità (cioè più basso il valore che la rappresenta),



la quale è esprimibile attraverso la relazione:

$$v'' = \frac{P}{R} = \frac{(mm)}{(mm)} \times \frac{1}{arc1''} \qquad (5.1)$$

dove P è l'intervallo della graduazione.

La sensibilità delle comuni livelle toriche è di circa 10÷20".

La livella si dice *rettificata* quando la tangente centrale è parallela alla retta di appoggio. Se la livella non è rettificata, la tangente centrale forma un angolo α con l'asse su cui è appoggiata che è proporzionale al <u>doppio dell'angolo</u> che l'asse forma con l'orizzontale. Per rettificarla bisognerà, quindi, ricentrare la bolla per metà, ruotando l'asse **r′** (corrispondente all'angolo α) e per l'altra metà manovrando le viti di rettifica, per rendere la tangente centrale parallela alla retta di appoggio, ottenendo così anche la rettifica della livella.

5.1.3 Errori sistematici nella misura degli angoli

Le misure di angoli saranno affette da errori sistematici, dovuti a cause preventivamente determinabili, e da errori accidentali, regolati dalla casualità e dalle leggi della probabilità.

Gli errori accidentali, vista la loro casualità potranno essere sono ridotti aumentando il numero di misure tenendo presente che, se σ_s è la precisione dello strumento, sarà:

$\sigma_m = \sigma_s / \sqrt{n}$

e potremo considerare attendibile la misura espressa dal valore più probabile:

$\alpha_m \pm \sigma_m$

Gli errori sistematici ossia quelli aventi la caratteristica di conservare al ripetere della misura valore e segno costante, nel teodolite dipendono essenzialmente, dalle imprecisioni costruttive e sono di seguito elencati:

1. Asse primari **a** non verticale e non passante, pertanto per il punto di stazione ($\boldsymbol{\varepsilon_v}$ di verticalità);
2. Asse secondario **s** non perpendicolare all'asse **a** ($\boldsymbol{\varepsilon_i}$ di inclinazione);
3. Asse terziario **c** non perpendicolare all'asse **s (**$\boldsymbol{\varepsilon_c}$ di collimazione);
4. C.O. non perpendicolare all'asse **a**";
5. Asse **a** non passante per il centro del C.O.;
6. C.V. non perpendicolare all'asse **s**;
7. Asse **s** non passante per il centro C.V.;
8. Asse **a** non incidente asse **s**;
9. Asse **s** non incidente asse **c**,

pertanto gli assi **a**, **s**, e **c** non sono incidenti in un punto C (centro dello strumento;

10. Graduazione non esatta nei cerchi graduati.

Conoscendo le cause che generano i suddetti errori è possibile studiarli e tentare, attraverso metodologie operative, di eliminarli.

Le metodologie necessarie alla riduzione degli errori, si possano considerare realizzate quando tali errori siano dell'ordine di grandezza della precisione strumentale, ma occorre tener presente che l'influenza di tali errori varia con le condizioni operative.

Se si ipotizzano nello strumento presenti i tre errori: $\boldsymbol{\varepsilon_v}$ (di verticalità), $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ (di inclinazione) e $\boldsymbol{\varepsilon_c}$ (di collimazione) è facile verificare che questi influenzano le letture al C.O. (angoli azimutali).

Collimando i punti A e B a partire dal punto di stazione S è definito l'angolo azimutale A (riferito al piano di inclinazione dell'asse **a** rispetto alla verticale) e le due distanze zenitali, le letture L che si farebbero nell'ipotesi di strumento perfettamente rettificato (non determinabile quindi) sono diversa dalle lettura L' reali, possiamo scrivere che l'errore nella lettura è: δ = L'-L = f(v, i, c, α, φ); sviluppando in serie di MacLaurin, trascurando le potenze superiori e considerando che f(0)= 0 si ottiene:

$$L^I - L = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\varepsilon_v + \left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)\varepsilon_i + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)\varepsilon_c + ...$$

ove le derivate sono funzioni di α e di φ e sono calcolate per $\varepsilon_v = \varepsilon_i = \varepsilon_c = 0$.

Gli effetti dei vari errori sulle letture possono essere studiati separatamente (legge di indipendenza dei piccoli errori) e sono pari a:

$\varepsilon_v = v\ (tg\varphi \cdot sen\ A)$

$\varepsilon_i = \pm\ i \cdot tg\varphi$ (5.2)

$\varepsilon_c = \pm\ c \cdot sec\varphi$.

La collimazione di un generico punto può essere eseguita in due situazioni diverse dello strumento, una con il C.V. *a sinistra* del cannocchiale (C.S.) ed una con il C.V. *a destra* (C.D.).

Se supponiamo, pertanto, di ruotare l'alidada di π ed effettuare le letture in questa seconda posizione (quindi con C.D.) noteremo che mentre gli errori ε_i ed ε_c si invertono di segno, permane solo l'errore ε_v. Possiamo quindi esplicitare la:

$L - L' = v \cdot sen\ A \cdot tg\varphi \pm i \cdot tg\ \varphi \pm c \cdot sec\varphi$ (5.3)

dove i doppi segni si riferiscono agli errori nelle due posizioni coniugate C.S. e C.D. (il passaggio non comporta invece alcuna variazione dell'asse a e quindi di ε_v).

L'angolo azimutale è dato dalla differenza tra due letture (collimando A e poi B, $\alpha = L_B - L_A$).

Effettuando le due misure nelle posizioni C.S. e C.D. si ottiene il vantaggio di essere in possesso di due valori dell'angolo e, quindi, una diminuire la possibilità di errori grossolani ma soprattutto l'eliminazione degli errori ε_i ed ε_c che influiscono di quantità contrarie sulle letture C.D. e C.S.

Se ne deduce la "regola di Bessel":

"La misura di un angolo azimutale, con la media dei valori ottenuti nelle due posizioni coniugate dello strumento, non è influenzata dalla presenza di errori di collimazione e di inclinazione dell'asse di rotazione del cannocchiale".

La misura dell'angolo, nelle due posizioni coniugate sarà data da:

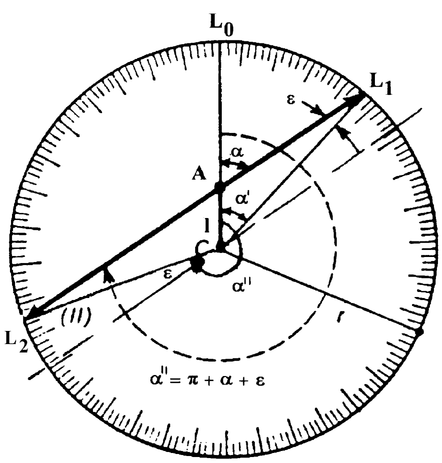
$$\alpha = A\hat{O}B = \frac{(L_B - L_A)}{2} + \frac{(L'_B - L'_A)}{2} - v(\operatorname{sen} A_B \cdot tg\varphi_B - \operatorname{sen} A_A \cdot tg\varphi_A) \tag{5.4}$$

avendo indicato con L e L' le letture sul C.O. nelle due posizioni coniugate dello strumento (C.D. e C.S.).

La presenza dell'errore residuo di verticalità può essere resa del tutto trascurabile sia per piccole inclinazioni del cannocchiale ($\varphi=0 \rightarrow tg\varphi=0$), sia con l'utilizzo di una livella molto sensibile ad esempio a coincidenza per cui v diventa molto piccolo.

Continuiamo ora a valutare l'influenza degli altri errori dovuti alla non perfetta rettifica dello strumento

L'errore dovuto alla eccentricità dell'asse *a* rispetto al cerchio orizzontale, può essere eliminato facendo due "letture agli indici opposti" e, con una certa approssimazione, anche con due letture coniugate



$$\alpha' = \alpha - \varepsilon; \tag{5.5}$$

$\operatorname{sen}\varepsilon \approx \varepsilon = e/r \times \operatorname{sen}\alpha$

Per esempio posto $\operatorname{sen}\alpha = 1$; e = 0,0 1 mm; r = 50 mm risulta:

$$\varepsilon'' = \frac{0.01mm}{50mm} \times 206.265 \approx 40''$$

(errore notevole anche per teodoliti di bassa precisione).

Se, però, consideriamo anche un'altra lettura con un indice diametralmente opposto al primo:

$$\alpha'' = \alpha' + \pi + 2\varepsilon = \alpha + \pi + \varepsilon \tag{5.6}$$

sommando le (5.5) e (5.6) si ha:

$$2\alpha = \alpha' + \alpha'' - \pi \rightarrow \alpha = \frac{\alpha' + \alpha'' - \pi}{2}$$

Gli errori (8) e (9), al pari degli errori (2) e (3), sono eliminati con le due letture coniugate.

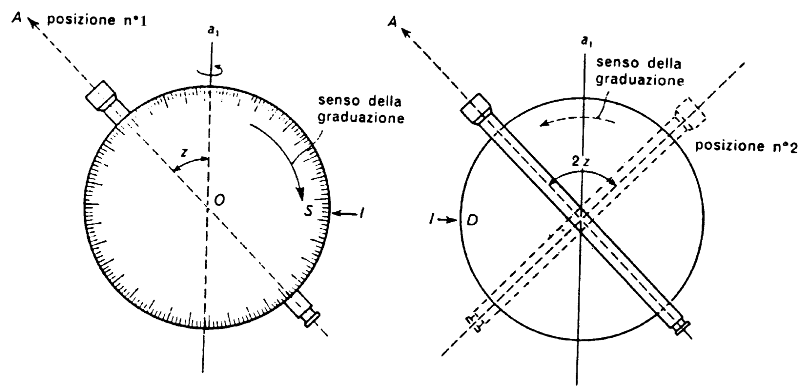
Per ridurre l'errore (10) di graduazione del cerchio, sapendo che la somma dei tratti (di differente taratura), dovrà comunque valere 2π si applica il metodo della "reiterazione" che consiste nell'eseguire la misura su differenti porzioni di cerchio.

Stabilita la precisione che si vuole ottenere, e quindi l'errore della media σ_m, si valuta il numero $n = \sigma_s^2 / \sigma_m^2$ di reiterazioni (rapporto della varianza dello strumento e del quadrato dell'errore della media prefissato); si collima, quindi, il primo punto e si esegue una prima misura

dell'angolo, applicando naturalmente la regola di Bessel. Si ricollima quindi il primo punto e si sposta il C.O. di $\gamma = \pi/n$ mediante la *vite di reiterazione*; si esegue la seconda misura e si sposta nuovamente il C.O. di un angolo γ, e così via.
La media aritmetica delle misure fornirà il valore cercato e riterremo: $\alpha = \alpha_m \pm \sigma_m$

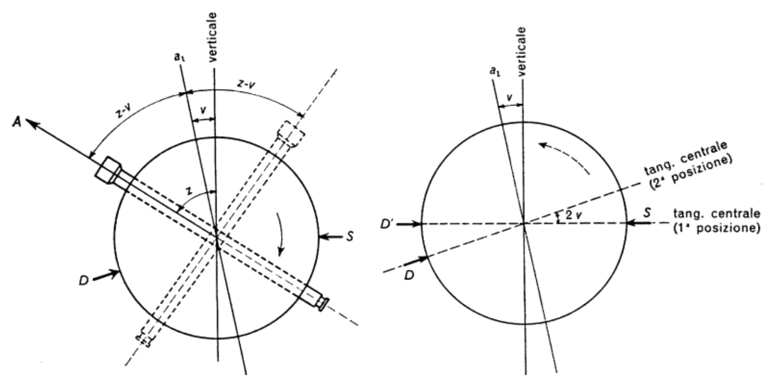
5.1.4 Misura degli angoli zenitali

Si considera oraria la graduazione del C.V., questo è mobile insieme al cannocchiale, mentre gli indici di lettura sono fissi all'alidada.



Se si vuole determinare la distanza zenitale di un punto A rispetto al centro O dello strumento, ipotizzando lo strumento rettificato, si effettua la collimazione del punto nella posizione C.S. e si esegue la lettura S sul cerchio. In queste condizioni l'asse di collimazione forma con l'asse *a* (e quindi con la verticale) l'angolo *z*. Si ruota l'alidada di 200° e il cannocchiale fino a collimare di nuovo il punto A. L'angolo di cui è ruotato il cannocchiale è 2z; detta D la lettura nella posizione C.D., tale angolo 2z è dato da S-D.

Si ha dunque: 2z = S - D (a meno di un multiplo dell'angolo giro ovvero si deve aggiungere 400^g ad S).



La media delle letture $X = (S + D)/2$ rappresenta la lettura che si farebbe con il cannocchiale diretto secondo la bisettrice dell'angolo, cioè secondo l'asse *v*.
Infatti:

z = S-X; z = (S-D)/2; D = S-2z = S-2(S-X); X = (S+D)/2.

X è lo *zenit strumentale* ed ha importanza per le misure rapide delle distanze zenitali, se fosse nullo, si avrebbe D = -S e quindi z = S.

Supponiamo che l'asse principale *a* sia inclinato di un angolo *v* nel piano verticale che contiene il punto collimato.

Collimato il punto A, *c* forma con *a* un angolo z -v. Sia S la lettura in posizione C.S., quando si ruota l'alidada di 200^g intorno all'asse ***a*,** l'asse *c* assume una posizione simmetrica della prima rispetto ad *a*, cioè forma con esso ancora l'angolo z -v; per ricollimare il punto occorre, quindi, ruotare il cannocchiale di 2 (z-v), per cui si ha S-D =2 (z -v) ovvero (S-D)/2 = z-v.

Calcolando la semidifferenza delle due letture non si ottiene più la distanza zenitale ma z-v .

Per eliminare tale errore si fa ricorso ad una livella posta in prossimità del C.V. (negli strumenti più precisi una livella a coincidenza, con sensibilità dimezzata), con la tangente centrale parallela al piano descritto da C per ogni posizione dell'alidada e collegata agli indici di lettura.

Prima di eseguire ciascuna lettura, la livella viene centrata (tramite una vite a piccolo passo che fa ruotare anche gli indici solidali alla livella): in queste condizioni la semidifferenza delle letture dà il valore corretto della distanza zenitale.

5.1.5 Errori nella misura degli angoli

Si può procedere alla compensazione delle osservazioni, dopo aver eseguito la misura di un angolo, solo se si ha un numero di misura sovrabbondante (per la misura dell'angolo, il numero strettamente necessario è uno). Se si sono eseguite pertanto *n* misure, in generiche condizioni operative, la precisione del generico valore x_i è determinata dalla sua varianza σ_{xi}^2.

Ciascuna misura eseguita in condizioni operative diverse (diversi teodoliti o operatori o condizioni ambientali ecc.) è caratterizzata da un differente peso.

Il peso di ciascuna misura sarà inversamente proporzionale alla varianza e sarà data dalla relazione:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_i}^2}$$

ove σ_0^2 è la varianza dell'unità di peso ed è stabilita a priori. La media pesata è data da:

$$m_p = \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i}$$

La *precisione della media* sarà data da:

$$\sigma_m = \frac{\hat{\sigma}_0}{n} = \pm\sqrt{\frac{\sum_i p_i (\alpha_i - \alpha_m)^2}{n(n-1)}}$$

Il confronto tra la deviazione standard e la precisione teorica è rappresentata dall'*error factor (E.F.),* dato dalla relazione:

$$\frac{\hat{\sigma}_{0(calcolata)}}{\sigma_{0(a\ priori)}} = error\ factor$$

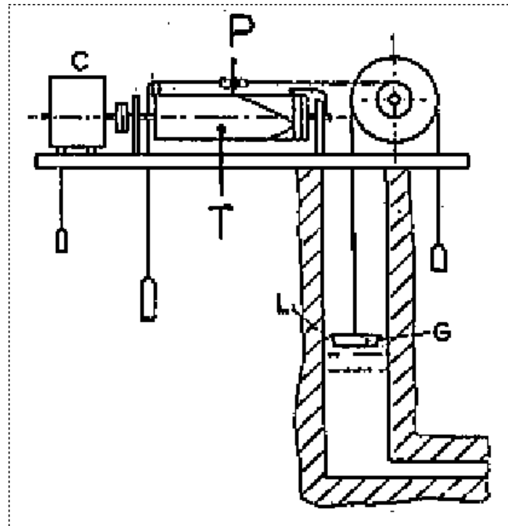
- E. F.< 1 si è sovrastimata la σ a priori
- E. F.> 1 si è sottostimata la σ a priori
- E. F.= 1,5÷1,7 può rientrare nella tolleranza valutando le misure con una precisione inferiore

5.2 IL LIVELLO

Un punto della superficie terreste può essere individuato altimetricamente tramite la sua quota, ovvero la distanza del punto dal geoide misurata lungo la verticale (*quota ortometrica*).

Le livellazioni sono operazioni che consentono di misurare la differenza di quota tra punti ovvero il loro dislivello. La misura assoluta delle singole quote è possibile solo se sono note le quote assolute di alcuni punti di riferimento (capisaldi di livellazione) ed è riferita al geoide ovvero alla superficie libera media del mare. Gli effetti delle maree sono misurati attraverso un *mareografo.*

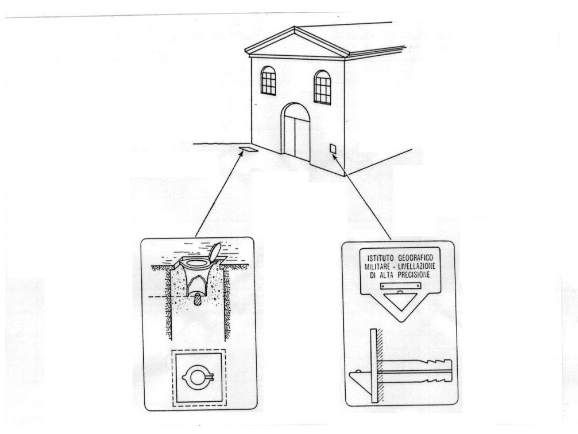
I *mareografi* sono costituiti da un galleggiante disposto in un pozzo, in comunicazione col mare in luogo molto riparato (moto ondoso insensibile), collegato da un sistema di leve e di carrucole ad una punta scrivente sopra un foglio di carta parametrato, avvolto attorno ad un cilindro che ruota con velocità uniforme. La penna traccia così, in una scala opportuna, il diagramma del livello marino; determinando l'ordinata media del diagramma si ottiene il livello medio, esteso al periodo di integrazione. Tale strumento è stato sostituito, nel tempo, da opportuni contatori digitali che registrano ed eventualmente, trasmettono la posizione del l. m. m.

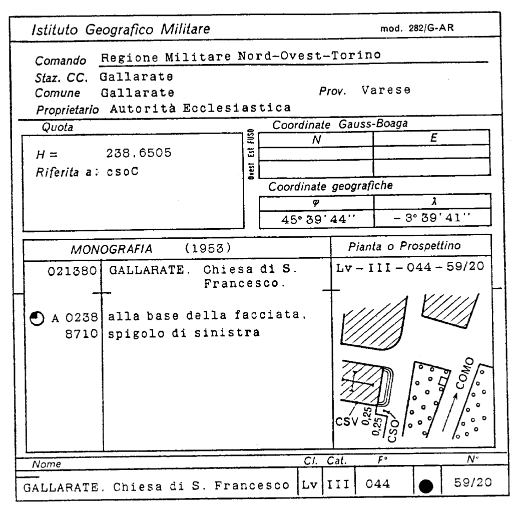


Le osservazioni e le integrazioni si ripetono giornalmente e si mediano le ordinate trovate per periodi di tempo uguali al periodo della più lunga marea, ottenendo così il livello medio. Per misure più precise, i periodi di osservazione sono di circa 18 anni. In Italia il mareografo fondamentale è quello di Genova.

Attraverso il mareografo di Genova l'I.G.M. ha istituito una rete di livellazione attraverso l'istituzione di capisaldi aventi quota ortometrica nota.

I capisaldi possono essere orizzontali (basamento di calcestruzzo fondato nel terreno sul quale è appoggiata una piramide tronco-conica di ceramica al cui vertice è una sfera anch'essa di ceramica, il tutto protetto da un chiusino metallico), o verticali (piccole mensole incassate nelle murature e terminanti con una sfera); in entrambi i casi la quota, tabellata con precisione del decimo di mm, corredata di numerosi informazioni grafiche (v. monografia) per l'individuazione del punto, viene riferita alla sommità della sfera.





Istituto Geografico Militare — mod. 282/G-AR

Comando Regione Militare Nord-Ovest-Torino
Staz. CC. Gallarate
Comune Gallarate — *Prov.* Varese
Proprietario Autorità Ecclesiastica

Quota
H = 238.6505
Riferita a: csoC

Coordinate Gauss-Boaga (Ovest / Est FUSO)

N	E

Coordinate geografiche

φ	λ
45° 39' 44''	- 3° 39' 41''

MONOGRAFIA (1953) — *Pianta o Prospettino*

021380 GALLARATE. Chiesa di S. Francesco. — Lv - III - 044 - 59/20

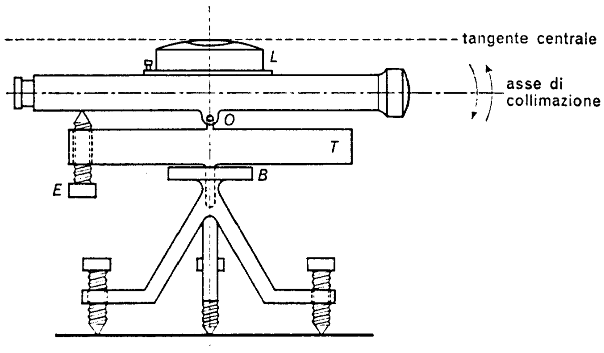
A 0238 8710 alla base della facciata. spigolo di sinistra

Nome	*Cl.*	*Cat.*	*F°*		*N°*
GALLARATE. Chiesa di S. Francesco	Lv	III	044	●	59/20

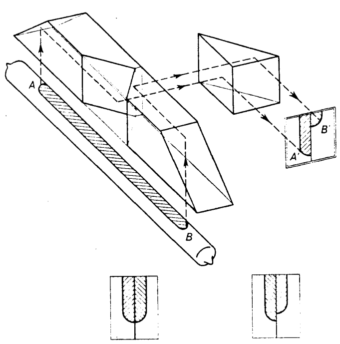
I capisaldi sono di quattro tipi diversi:

1. *di linea* posti alla distanza media di 1 km;
2. *principali* posti alla distanza media di 2-3 km;
3. *fondamentali* posti ogni 25 km;
4. *nodali* posti all'incrocio di più linee; tutti devono essere in sede propria (orizzontali). I

capisaldi verticali sono solitamente aggiunti ai precedenti per verificarne gli eventuali spostamenti; la loro distanza media è solitamente di ≅3 km.



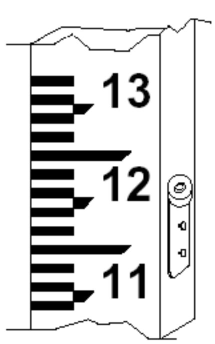
Il livello è costituito da una traversa girevole attorno ad un asse *a,* incernierata su una base *B,* dotata di livella sferica, con viti calanti necessarie per rendere grossolanamente verticale l'asse *a*; i1 cannocchiale é collegato alla traversa con un sistema costituito da una vite di elevazione *E* e (schematicamente) da una molla *M* che gli permette piccole rotazioni attorno ad un asse orizzontale per O.
Rigidamente collegata al cannocchiale, a parte le viti di rettifica, è invece la livella torica *L*.

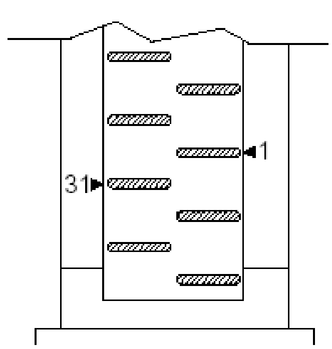


Collimata la stadia, si agisce sulla vite di elevazione per il centramento della livella torica; questa può essere anche a coincidenza. Lo strumento é "rettificato" quando l'asse di collimazione del cannocchiale e la tangente centrale della livella torica sono paralleli. Centrando la bolla la tangente centrale l'asse di collimazione si dispone orizzontalmente e, conseguentemente, anche l'asse di collimazione risulta orizzontale.

Ruotando la traversa per collimare un ulteriore stadia, a causa dell'errore residuo dell'asse di collimazione, la bolla non rimane centrata ed una nuova manovra sulla vite E consente di ripristinare l'orizzontalità dell'asse di collimazione.

5.2.1 Le stadie





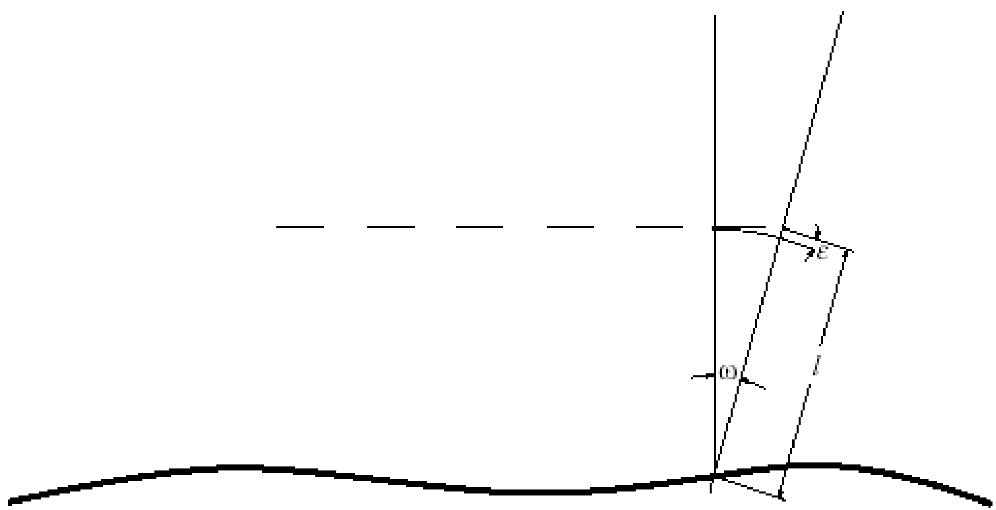
Esistono vari tipi di stadie a seconda del tipo di rilievo e della precisione richiesta.
Le più semplici sono stadie in legno costituite da aste centimetrate generalmente della lunghezza di due o tre metri. Nel caso di livellazioni di precisione le stadie sono formate da una custodia in legno o di alluminio, contenente un nastro di acciaio invar centimetrato o mezzo centimetrato.

In entrambi i casi le graduazioni sono numerate ad ogni decimetro.

Le stadie dispongono di una livella sferica che ne rende possibile la resa verticale, ciò è anche assicurato dall'operatore che regge questi attrezzi nelle livellazioni tecniche con due paline, o, nelle livellazioni utilizzanti stadie a nastro invar, con l'aiuto di due aste allungabili, che dalla sommità della stadia si ancorano saldamente al terreno.

Tra le cause che condizionano l'errore nella lettura vi sono:

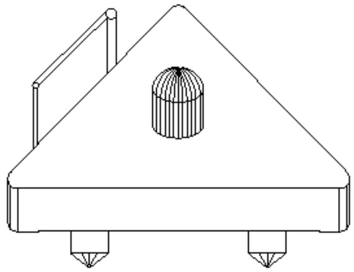
- la verticalità della stadia (nella livellazione di precisione va realizzata con cura), infatti, pur essendo l'errore di lettura ε del secondo ordine rispetto all'angolo ω (vedi figura) si ha



per *l =2 m* ed *ω =1 gon*, tale errore è di *0.25 mm* (non è accettabile nel caso di livellazione di alta precisione, come vedremo di seguito). Normalmente tale errore è contenuto attorno a *0.1-0.2 gon*, attraverso una livella sferica solidale al corpo della stadia.

$l' = l\cos\omega \cong l(1-\frac{\omega^2}{2}) \Rightarrow l - l' = l\frac{\omega^2}{2} \cong l\frac{\omega}{2}$

- il metodo di interpolazione della lettura ovvero l'interpolazione di lettura a seconda che sia a stima o micrometrica (a parte i metodi di lettura elettronica). Nel primo caso si utilizzano stadie in legno e, se la distanza tra strumento e stadia non supera i 40-50 m, possiamo ritenere che lo s.q.m. di lettura sia $\sigma_L = \pm 0.1\ cm$, un decimo dell'intervallo di graduazione della stadia. Nel caso di utilizzo di micrometro a lamina piano parallela lo sqm di lettura è, per questa distanza, di 1/10 dell'errore precedente, cioè $\sigma_L = \pm 0.1\ mm$ che può essere ulteriormente ridotto avvicinando la stadia allo strumento. Sperimentalmente si è visto che σ_L, per distanze comprese fra i 5 ed i 50 m cresce con la radice quadrata della distanza.



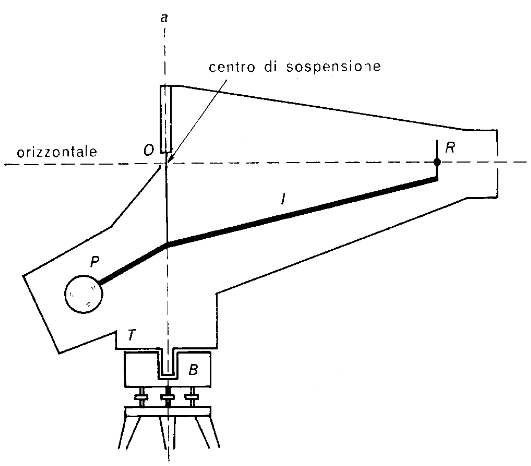
Lungo la linea di livellazione la stadia viene appoggiata su capisaldi opportunamente predisposti sul percorso, a calotta semisferica in acciaio inossidabile. Nel caso ciò non fosse possibile o conveniente, si utilizzano dei pesanti supporti di ghisa, dotati di tre punte che si conficcano al suolo, su questi è posto un grosso chiodo d'acciaio a testa semisferica. Questi supporti (tripodi), sollevati per una maniglia, si trasportano lungo tutta la linea di livellazione.

5.2.2 Livelli Automatici

Il cannocchiale è sostituito da un tubo *T* nel quale sono disposti un foro *O* (obbiettivo) e il reticolo *R,* vincolato ad un braccio mobile *l* ruotante attorno a P distante *m* da O.

Se il tubo (ed anche OP) ruota rispetto all'orizzontale di un angolo α , *l* ruoterà di un angolo β dato da:

$$\frac{m}{\mathrm{sen}(\beta-\alpha)}=\frac{l}{\mathrm{sen}\alpha};\beta-\alpha=\frac{m}{1}\alpha;\beta\approx\alpha\left(\frac{m}{1}+1\right)$$



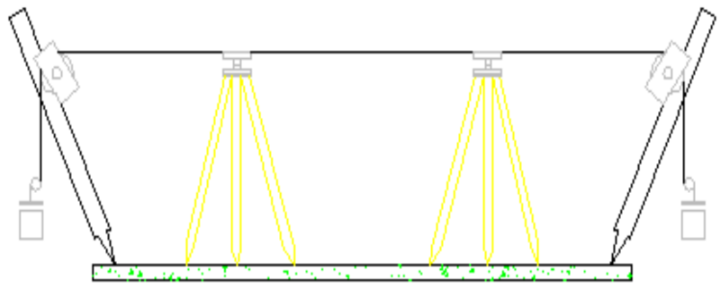
Il livello automatico è dotato di un meccanismo che, al ruotare di α del tubo, fa ruotare di β il braccio *l,* in particolare per *m* = 0 (*l* ruota attorno ad 0), dovrà essere β = α. Uno schema funzionale che realizza tale soluzione è mostrato in figura.

Tutti i livelli automatici (forniti di pendolo), per non avere disturbo nelle letture e non dover attendere troppo tempo, necessitano di uno smorzatore delle oscillazioni che garantisce notevole rapidità di azione, e richiedono solo il centramento della livella sferica .

5.3 MISURA DIRETTA DELLE DISTANZE

La misura diretta delle distanze è eseguita attraverso l'esistenza di un campione riportato sull'allineamento stabilito e nella valutazione del numero di volte in cui lo stesso ed i suoi sottomultipli sono contenuti nella distanza da misurare.

Il campione può essere costituito da una *cordella metrica* sostanzialmente consistente in nastro sottile di acciaio graduato con precisione al centimetro, avvolgibile da 10, 20, 50, 100m ovvero da aste metalliche. In quest'ultimo caso l'apparecchio più diffuso e l'*apparato di Jäderin.*



Tali misure dirette devono essere sempre fatte su terreno piano o possibilmente poco inclinato, specialmente se si desidera raggiungere una elevata precisione.

Esistono differenti cause di errori in tali misure:

Errori sistematici.

1. Taratura del campione (non costante nel tempo, per l'elasticità dei materiali costituenti i campioni);
2. Temperatura. Le variazioni di temperatura possono essere causa di errori abbastanza rilevanti; per diminuirne molto l'influenza si costruiscono, nastri o fili di un materiale come l'INVAR che ha un coefficiente di dilatazione di 1μm al metro e al grado (10^{-6}m/mC°). Le rotelle metriche sono dotate di una scala graduata con la indicazione delle correzioni necessarie al variare della temperatura. Nelle misure di precisione, si fa in modo che il nastro si trovi in condizioni ambientali più uniformi possibili;
3. Inesatta valutazione della tensione. Per ottenere precisioni dell'ordine di 10^{-6} bisogna servirsi dell'apparato di Jäderin: con fili o nastri di "INVAR", lunghi 24 m e graduati al mm. Le "rotelle" metalliche devono essere ben tese durante la misura e sono preferibili a quelle di plastica o di stoffa che, con il tempo, si allungano.
4. Inesatto allineamento, risulta l'errore più pericoloso e deve essere eliminato con uno strumento ottico; sull'allineamento si devono disporre dei segnali (Paline) muniti di tratti di riferimento, tra i quali si determina la distanza.
5. Correzione di convergenza e/o riduzione all'orizzonte per le distanze maggiori di qualche km.

Errori accidentali.

Se d è la lunghezza del campione e D = nd la lunghezza misurata, supposte le n misure di egual precisione σ_o, si avrà per σ_D (varianza della variabile casuale D) l'espressione:

$\sigma_D^2 = n \times \sigma_0^2 = \frac{D}{d}\sigma_0^2$ e quindi $\sigma_D = \pm k \times \sqrt{D}$, ovvero l'errore (s.q.m.) è proporzionale alla radice quadrata della distanza D.

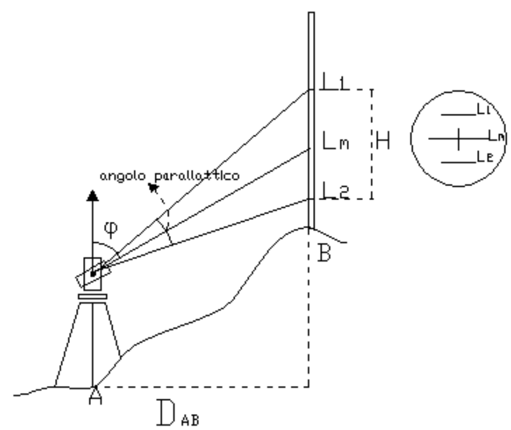
5.4 MISURA INDIRETTA DELLE DISTANZE

Dovendo misurare la distanza A-B si possono eseguire indirettamente le misure attraverso un teodolite ovvero attraverso un distanziometro.

5.4.1 Misura indiretta delle distanze con il teodolite

Misura ad angolo parallattico costante

Si pone in A un teodolite ed in B una stadia; il cannocchiale del teodolite è dotato di due fili distanziometrici accoppiati ad una mira, pertanto sulla stadia si leggerà il tratto H sotteso tra i due fili in corrispondenza delle letture L_1 ed L_2.



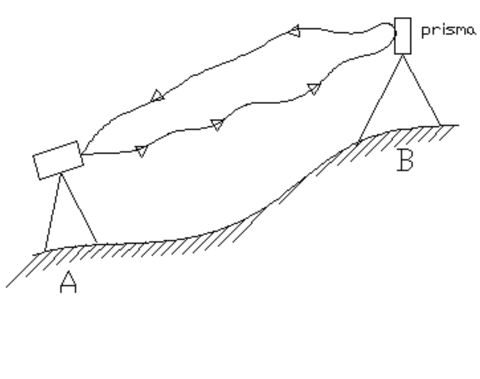
La distanza sarà data da:

$$D_{AB} = kHsen^2\varphi$$

dove φ è l'angolo zenitale (sul filo medio o mira), $H = L_1 - L_2$ e K è una costante che dipende dallo strumento detta *costante distanziometrica*. L'angolo parallattico è quello sotteso dai due fili distanziometrici che essendo fissi fanno si che sia costante.

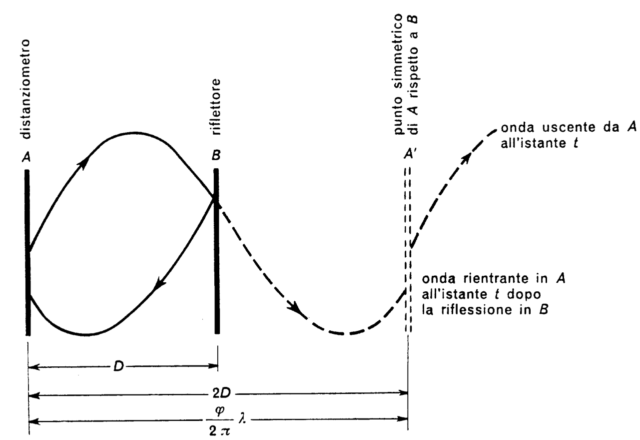
Per un angolo zenitale pari a $\pi / 2$ la distanza è pari a: $D_{AB} = kH$

5.5 ELETTRODISTANZIOMETRO (EDM)



Un'onda sinusoidale viene emessa da uno strumento posto nell'estremo A, della distanza AB da misurare, arrivata in B viene riflessa e torna al punto A. Per valutare la distanza si misura o la differenza di fase tra l'onda emessa e quella ricevuta, oppure il tempo impiegato per eseguire il percorso (Δt).

In quest'ultimo caso si parlerà di *EDM ad impulsi* il quale può funzionare senza l'ausilio di apparati riflettenti quali ad esempio i *prismi.* La distanza è determinata attraverso la relazione $D_{AB} = \frac{\Delta t \cdot v}{2}$ con v la velocità di propagazione dell'onda, la quale può essere riflessa da speciali catarifrangenti o segnali riflettenti od infine direttamente dalla superficie stessa dell'oggetto.



Poiché l'intervallo di tempo non può essere facilmente misurato con precisione (v = 3×10^8 m/sec pertanto per una precisione di 1m bisognerebbe valutare Δt con una precisione di 10^{-8}), si paragonano nel punto A l'onda emessa e quella riflessa, determinando lo sfasamento ϕ tra le due onde. In tal caso si parlerà di *EDM per differenza di fase* i quali necessitano di *prisma retroriflettenti.*

L'EDM genera un'onda trasversale sinusoidale: $S = Asen(\omega t + \phi)$ dove ω è la pulsazione dell'oscillazione e T il suo periodo. Nell'istante t lo stato dell'oscillazione in A è $S_1 = Asen(\omega t + \phi_0)$; nello stesso istante e nello stesso punto l'onda riflessa ha uno stato di oscillazione pari a $S_2 = Asen(\omega(t + \Delta t) + \phi_0)$ con Δt è il tempo impiegato dall'onda a percorrere la distanza 2d. Si produce, quindi, tra le due onde uno sfasamento:

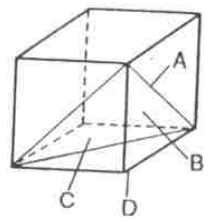
$$\varphi = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{t} \cdot \frac{2d}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2d \quad \text{da cui si ottiene} \quad D_{AB} = \frac{\varphi}{2\pi} \times \frac{\lambda}{2}.$$

Nella suddetta formula verranno inseriti il numero intero *n* di cicli che l'onda ha eseguito lungo il percorso $2D_{AB}$. Pertanto l'equazione fondamentale del distanziometro ad onde è:

$$D_{AB} = n \times \frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi}{2\pi} \times \frac{\lambda}{2}$$

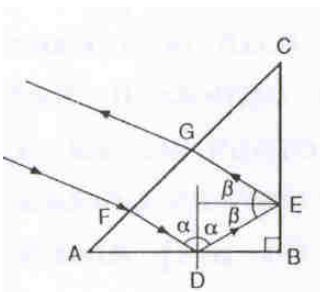
Un distanziometro deve allora essere costituito da:

- in A da un oscillatore, un rilevatore ed un discriminatore di fase (strumento);
- in B, un apparato sensibile all'onda in arrivo ed in grado di rinviarla in direzione di A (prisma ottico).

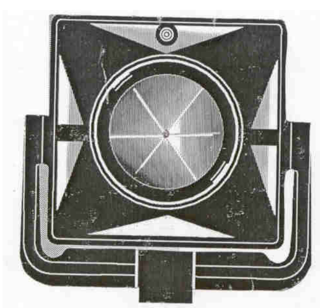


Il riflettore è in generale costituito da uno o più prismi retrodirettivi (*cube-corners*), ottenuto tagliando un cubo di vetro ottico lungo le diagonali di tre facce adiacenti.

Del prisma ottenuto la faccia A è interna al cubo originario, mentre le facce B, C, D,sono quelle esterne contenenti le diagonali del taglio. Lungo la faccia A si ha l'ingresso dei raggi incidenti mentre sulle restanti facce si hanno le riflessioni interne che portano il raggio a riemergere in direzione parallela al raggio incidente.

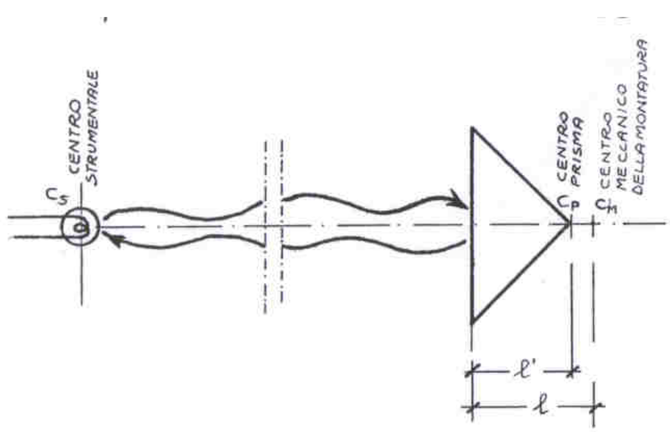


Il percorso eseguito è mostrato in figura ed attraverso semplici relazioni matematiche è facile dimostrare che è indipendente dall'angolo e dal punto di incidenza.

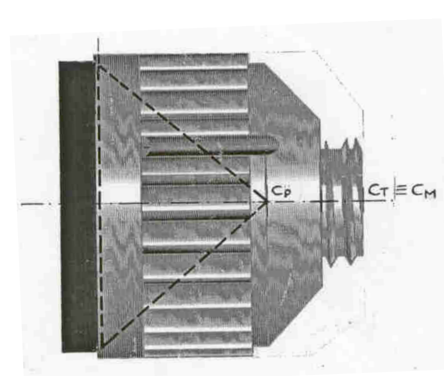


Generalmente i prismi sono sistemati in una montatura che è avvitata ad un supporto e consente il centramento forzato su aste telescopiche o su basette standard, inoltre, un sistema di mira è di solito ad esso accoppiato permettendo all'operatore una corretta collimazione.

Essendo il percorso dell'onda superiore alla distanza fra il centro strumentale c_s ed il centro del prisma c_p, la montatura è realizzata in modo tale che sia noto il suo centro meccanico c_m.



Il percorso geometrico dell'onda *l'* all'interno del prisma è moltiplicato per l'indice di rifrazione del vetro (k=1,5167):



$$PSM = (l' x 1{,}5167) - l$$

ovvero uguale alla distanza fra c_s ed un punto c_t che si chiamerà *centro teorico del prisma*. La distanza fra il c_m ed il c_t è definita *costante del prisma.*

Il numero di prismi necessario ad assicurare una buona risposta dipende dal tipo di distanziometro e dalla distanza da misurare.

Errori Sistematici

Gli errori sistematici nella misura elettronica delle distanze sono dovuti a due cause:

- errori di centramento dello strumento e/o del prisma, tra i quali possiamo inserire l'errore dovuto alla "costante" del prisma;
- differenza di velocità di percorso delle diverse onde elettromagnetiche aventi diverse lunghezze d'onda, a causa del diverso indice di rifrazione dell'atmosfera, influenzato dai fattori ambientali (Temperatura, Pressione, Umidità, ecc.). Lo strumento richiede, quindi, delle indicazioni sommarie di T, P, u%, che sono memorizzate dal computer e permettono di calcolare automaticamente le correzioni da apportare alla misura.

L'incertezza della singola misura è data da:

$$\sigma_d = \pm\left(m + kD^{-6}\right) = \pm 1 \div 5 \ \ mm/km$$

dove la parte fissa *m* può variare da 0.1mm fino a qualche mm, a seconda delle caratteristiche del distanziometro; invece, k esprime la quantità proporzionale alla distanza (espressa in km) variabile da frazioni di mm fino a qualche mm, in funzione delle caratteristiche ambientali.